DÉFINITION ET EXISTENCE DU NOYAU DANS UN MODÈLE D'ÉCONOMIE OU LA PRODUCTION PRÉSENTE DES RENDEMENTS CROISSANTS

par

Martine QUINZII

Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique

et Université d'Aix-Marseille III

Ce mémoire présente un modèle d'économie avec production où la technologie est à rendements croissants par rapport à la taille de la production. Le problème étudié est celui de l'existence du noyau d'une telle économie. On définit donc le noyau de l'économie et on discute de son interprétation. Puis des conditions suffisantes d'existence sont données pour le cas où la technologie permet la transformation de biens qui peuvent être utilisés indifférement comme biens de consommation ou comme inputs de production en un seul output.

Une des limites importantes de l'analyse économique en termes d'équilibre général provient de l'impossibilité d'intégrer dans une telle analyse l'hypothèse de rendements d'échelle croissants dans les processus de production. En effet, un «entrepreneur», gérant d'une unité de production à rendements croissants et cherchant à maximiser son profit, compte tenu des prix du marché, serait amené à augmenter toujours plus la production pour profiter des économies d'échelle, ce qui empêche manifestement la réalisation d'un équilibre.

C'est dire que, dès l'instant où l'on introduit l'hypothèse de rendements d'échelle croissants, on est obligé de sortir du cadre idéal du modèle concurrentiel où une production et une distribution des biens socialement efficaces (Pareto Optimales) sont compatibles avec des décisions individuelles complètement décentralisées.

Selon que l'on privilégie un des deux aspects – décentralisation ou efficience sociale – on aborde le problème des rendements croissants de manière différente.

Si on garde le concept classique d'entreprise et l'hypothèse de maximisation du profit, on doit abandonner l'hypothèse de comportement concurrentiel de l'entrepreneur. Il faut supposer que celui-ci est conscient que l'écoulement de sa production sur le marché est limité par la demande des consommateurs. On aboutit ainsi à un comportement de type monopole ou oligopole, selon les hypothèses faites sur l'organisation de la production, que l'on étudie dans un cadre du marché partiel des biens produits.

Si on s'intéresse aux allocations Pareto optimales qu'il est possible d'atteindre avec des processus de production à rendements croissants, on doit abandonner l'hypothèse que la production est gérée dans le but de réaliser un profit. On doit au contraire supposer que les décisions de production sont prises, par exemple par un planificateur central, sur la base de l'utilité des biens produits pour les agents de l'économie. Cette approche amène à insister sur le fait que la mise en œuvre d'un processus de production nécessite toujours la coopération d'un certain nombre d'agents économiques – fournisseurs de travail, de matières premières en amont, consommateurs de biens produits en aval –. Une approche inspirée de la théorie des jeux coopératifs semble bien adaptée pour traiter de ces interactions, quand on abandonne l'hypothèse de décentralisation par les prix, mais que l'on maintient les hypothèses de rationalité et de libre choix des agents économiques. C'est le point de vue qui sera adopté ici et qui sera précisé dans l'exposé du modèle étudié.

1. UN MODELE D'ÉCONOMIE AVEC PRODUCTION A RENDEMENTS CROISSANTS ET LE CONCEPT DE NOYAU

a) Le modèle

Sans entrer dans le détail des hypothèses retenues, nous allons présenter immédiatement les grandes lignes du modèle. Sa conception est en effet directement issue de la manière dont est abordé le problème des rendements croissants et l'exposé en sera ainsi facilité.

L'économie comporte $l + m$ biens. Les l premiers biens sont des biens non productibles qui peuvent être utilisés soit directement pour la consommation, soit comme inputs d'un processus de production qui permet de fabriquer les m derniers biens. Les possibilités technologiques de cette transformation sont décrites par un domaine de production : $Y \subset \mathbf{R}_+^l \times \mathbf{R}_+^m$. Les productions possibles seront notées (z, y) où z est un vecteur de $\mathbf{R}_+^l$ qui décrit les quantités d'inputs utilisées et y un vecteur de $\mathbf{R}_+^m$ qui décrit les quantités de biens produits. Nous supposerons que ce domaine de production présente globalement des rendements croissants, c'est-à-dire que si (z, y)

est une production possible ($(z, y) \in Y$) alors pour tout $\lambda \geqslant 1$, $(\lambda z, \lambda y)$ est encore une production possible.

Enfin, il existe n agents repérés par l'indice $i \in [1, \ldots, n]$. L'agent i peut consommer n'importe quelle quantité positive des $l + m$ biens. Ses préférences sur les consommations possibles sont représentées par une fonction d'utilité u_i définie sur $\mathbf{R}_+^{l+m}$. Enfin, il possède des ressources initiales en biens non productibles représentées par un vecteur $w_i \in \mathbf{R}_+^l$.

Une allocation est un vecteur $\xi = (x_i, y_i)_{i=1,\ldots,n}$ de $\mathbf{R}_+^{(l+m)n}$. $x_i \in \mathbf{R}_+^l$ est la quantité de biens non productibles et $y_i \in \mathbf{R}_+^m$ la quantité de biens produits dont dispose l'agent i.

Ce cadre est celui du modèle concurrentiel à la Arrow-Debreu, à ceci près que le modèle ne comporte pas d'entrepreneurs. Nous supposerons au contraire que les possibilités technologiques décrites par Y sont connues de tous les agents de l'économie qui peuvent jouer eux mêmes le rôle d'entrepreneurs. Plus précisément, nous ferons l'hypothèse suivante : tout groupe d'agents, que nous appellerons une coalition, peut mettre en œuvre le processus de production. Les inputs sont alors pris sur ses ressources initiales et les biens produits sont répartis entre ses membres, la transformation étant toujours décrite par Y. Une coalition est donc formée de tous les agents qui sont associés par un processus de production, soit parce qu'ils sont fournisseurs (de travail, de matières premières, . . .), soit parce qu'ils sont consommateurs de biens produits, le même agent pouvant évidemment avoir ces deux rôles. Les agents décident de participer ou non à une coalition sur la base de l'allocation finale qu'ils pourront obtenir.

Pour décrire complètement les allocations finales accessibles aux membres d'une coalition, il faut spécifier également les possibilités d'échanges. Nous ferons l'hypothèse que les membres d'une coalition ne peuvent échanger qu'entre eux. Cette hypothèse est assez restrictive et nous verrons plus loin quel est sont rôle.

L'économie fonctionnera de manière optimale si la coalition composée de tous les agents se forme, ce qui permet d'exploiter au maximum les possibilités d'échanges et le rendement croissant de la production.

Ceci ne fait que traduire de manière abstraite l'idée courante que la gestion optimale d'une production à rendements croissants est obtenue par une entreprise publique, ce qui permet de concilier la nécessité d'avoir une entreprise de grande taille pour exploiter les économies d'échelle et le souci d'éviter qu'une partie du bénéfice, qui a quelque chose d'un bien public, ne soit détourné par un comportement de monopole.

Mais ce modèle permet de pousser plus loin l'étude, et de s'interroger sur la stabilité d'une telle organisation.

Le concept de stabilité utilisé, à savoir l'existence du noyau de l'économie, est emprunté à la théorie des jeux coopératifs, comme le laissait prévoir l'introduction du terme de «coalition». Etant donné qu'il est possible de transposer les idées de base de cette théorie pour introduire le concept de noyau de l'économie, sans en utiliser le formalisme abstrait, il ne nous paraît pas utile de rappeler les définitions et les résultats de base de cette théorie. Le lecteur intéressé pourra se reporter au livre d'I. Ekeland. «La Théorie des Jeux et ses Applications à l'Economie Mathématique».

b) Le noyau de l'économie

1) La définition

Avec les hypothèses faites en a) il est possible de décrire les allocations finales que peuvent s'assurer les membres d'une coalition S, agissant de manière coopérative et indépendamment des actions des agents qui n'appartiennent pas à S. Ce sont les allocations qui peuvent être obtenues par répartition des ressources totales $\sum_{i \in S} w_i$ de la coalition entre une partie directement consommée $\sum_{i \in S} x_i$, et une partie z utilisée pour produire $\sum_{i \in S} y_i$.

Formellement,

$$A(S) = \left\{ \xi = (x_i, y_i)_{i=1,\dots,n} \mid \left(\sum_{i \in S} w_i - \sum_{i \in S} x_i, \sum_{i \in S} y_i \right) \in Y \right\}.$$

Il est clair que seules les composantes correspondant à des agents de la coalition S importent. Les autres sont absolument quelconques.

L'aspect coopératif concerne la décision d'utiliser une partie des ressources initiales pour la production, et la répartition des biens disponibles entre les agents de la coalition S.

Les allocations de A(S) étant obtenues à partir des seules ressources initiales $\sum_{i \in S} w_i$ de la coalition (ce qui revient à dire que les échanges et la répartition des biens produits sont limités aux seuls membres de S), l'ensemble A(S) est indépendant des agents hors de la coalition S.

Le terme de coalition a d'ailleurs été choisi pour évoquer ce double aspect de coopération interne et d'indépendance des agents extérieurs.

Il est clair que l'hypothèse de rendements croissants joue comme incitation à la coopération. En effet, l'échelle et donc le rendement de la production ainsi que les possibilités d'échange augmentent avec la taille de la coalition. La coopération maximale correspond à la formation de la coalition, notée N, de tous les agents.

De manière classique, une allocation sera appelée *Pareto Optimale* si elle correspond à l'utilisation efficace des ressources totales de l'économie.

Donc une allocation est *Pareto Optimale* si :

- elle est réalisable par la coalition N de tous les agents,
- on ne peut pas augmenter simultanément l'utilité de tous les agents : il n'existe pas d'allocation $\xi' \in A(N)$ telle que $u_i(x_i', y_i') > u_i(x_i, y_i)$ $\forall i \in N$.

Supposons qu'une allocation ξ, Pareto Optimale soit telle que les agents d'une coalition S puissent trouver une allocation $\xi' \in A(S)$ qui leur soit favorable. On peut penser que les agents de S n'accepteront pas de coopérer avec l'ensemble des autres agents, puisqu'ils peuvent obtenir mieux avec leurs propres moyens. On dira alors que la coalition S *bloque* l'allocation ξ.

Formellement :

Une allocation $\xi = (x_i, y_i)_{i=[1,\dots,n]}$ *est bloquée par une coalition S si il existe* $\xi' = (x_i', y_i')_{i=[1,\dots,n]}$ *de A(S) telle que :*

$$u_i(x_i', y_i') > u_i(x_i, y_i) \quad \forall i \in S.$$

Avec ce vocabulaire, une allocation est Pareto Optimale si :

- elle est réalisable
- elle n'est pas bloquée par la coalition N.

Mais cette condition n'assure pas qu'elle ne soit pas bloquée par une sous coalition S. Ceci conduit à la définition suivante :

Le noyau de l'économie est l'ensemble des allocations :

- *qui sont réalisables (par l'ensemble N des agents) ;*
- *qui ne sont pas bloquées par aucune coalition.*

Le problème que nous allons étudier est le suivant : est-ce que l'hypothèse de rendements croissants du processus de production entraîne l'existence d'au moins une allocation dans le noyau de l'économie ?

Si le noyau est non vide, cela signifie qu'il existe, de manière théorique et sans préjuger des mécanismes de décentralisation qui permettraient d'y parvenir, une allocation réalisable avec une seule unité de production et telle qu'aucun groupe d'agents ne puisse trouver un intérêt commun à faire sécession et à s'organiser lui-même. Si le noyau est vide, un planificateur, aussi intelligent et bien informé soit-il, ne pourra gérer la production en une seule unité et organiser la répartition des biens sans heurter les intérêts d'au moins un groupe d'agents.

A la vue de cette interprétation, on peut avancer l'idée que ce type d'étude apporte un éclairage nouveau sur le problème, récurrent dans certains pays européens, de l'opportunité de «briser le monopole public». Il n'est en effet pas impossible, qu'en dehors de tout problème de pouvoir ou d'inefficacité de la production qui peut naître d'une telle organisation, les pressions en ce sens provenant de certains groupes d'agents économiques, (par exemple quand les industriels, demandent à organiser leur propre système de courrier), soient la manifestation du phénomène d'instabilité lié à la non existence du noyau.

Il faut bien noter que seul un résultat positif d'existence s'interprète facilement en termes d'organisation industrielle. Si le noyau est non vide, on peut considérer que l'organisation de la production en monopole public se déduit de manière naturelle des hypothèses faites sur les possibilités techniques de production. Si au contraire le noyau est vide, il n'y a aucune structure qui émerge naturellement du modèle. L'organisation en monopole est instable, mais la présence de plusieurs unités de production est socialement inefficace puisqu'elle ne permet pas d'utiliser complètement les économies d'échelle.

On peut cependant considérer que, dans le cas d'un résultat positif, on a accompli un premier pas dans la tentative de dégager du modèle, de manière endogène, une organisation rationnelle de la production, au lieu de fixer, comme c'est le cas dans le modèle concurrentiel à la Arrow-Debreu et dans la plupart des modèles d'équilibre partiel, à la fois le nombre et le comportement des firmes sur le marché.

2) Les résultats obtenus par Scarf

Le modèle que nous venons de décrire et le problème de l'existence du noyau ont été introduits dans la littérature par Scarf [4], [5], [6], qui a obtenu les résultats suivants :

– dans le cas où le modèle ne comporte qu'un input et un output ($l = 1$, $m = 1$), l'hypothèse de rendements croissants dans la production suffit à entraîner l'existence du noyau (sans qu'il soit même nécessaire d'ajouter une hypothèse de convexité sur les préférences).

– s'il y a plus d'un input ($l > 1$), il y a peu de chance de trouver une condition suffisante d'existence du noyau qui porte seulement sur le domaine de production Y. Plus précisément, à tout ensemble de production Y qui est :

1) Fermé,

2) Suradditif : $(z, y) \in Y$, $(z', y') \in Y \Rightarrow (z + z', y + y') \in Y$,

3) A rendements croissants : $(z, y) \in Y \Rightarrow (\lambda z, \lambda y) \in Y$, $\forall \lambda \geqslant 1$,

4) Tel qu'il existe un vecteur strictement positif $\sigma \in \mathbf{R}^l_+$ tel que

$$\sigma \cdot y \leqslant \max_{h \in [1 \dots l]} z_h \qquad \forall (z, y) \in Y$$

on peut associer une économie (c'est-à-dire des agents, des fonctions d'utilités et des ressources initiales) telle que le noyau de l'économie soit vide.

Le rôle de l'hypothèse 4) dans ce résultat et les chances d'obtenir un résultat positif en la supprimant sont difficiles à évaluer. Ceci d'autant plus que le théorème est présenté dans une note non publiée qui contient une esquisse de la démonstration mais n'en donne pas les détails.

Ce résultat a conduit Scarf à étudier l'hypothèse suivante : un nombre l_0 ($l_0 \leqslant l$) de biens non productibles n'entrent pas comme argument de la fonction d'utilité des agents. On peut penser à des matières premières qui sont détenues par des agents économiques mais ne peuvent servir directement à la consommation. Dans ce cas, le noyau de l'économie est non vide si et seulement si le domaine de production présente une propriété de «distributivité» par rapport à ces biens.

Formellement la définition en est la suivante :

Soient $(z_j, y_j) \in Y$ des productions possibles. Pour tout système de coefficients positifs $(\alpha_j)_{j=1,\dots,J}$ tels que :

$$\sum_{j=1}^{J} \alpha_j z_{jh} \geqslant z_{kh} \qquad \forall k \in [1, \dots, J] \qquad \forall h \in [1, \dots, l_0]$$

alors : $\left(\sum_{j=1}^{J} \alpha_j z_j, \ \sum_{j=1}^{J} \alpha_j y_j \right) \in Y$

En d'autres termes, toute combinaison de productions possibles qui utilise plus des l_0 premiers inputs que chacune des productions considérées est encore une production possible.

Bien qu'on puisse en donner un interprétation géométrique qu'il serait un peu long de décrire ici, cette condition de distributivité n'a pas un contenu très intuitif. Mais elle a le mérite d'être une condition nécessaire et suffisante d'existence du noyau dans le cas étudié par Scarf.

Il nous a paru intéressant d'étudier le cas contraire, c'est-à-dire celui où tous les biens non productibles ont de double rôle de biens de consommation et d'inputs de la production. Comme le laissait prévoir le théorème d'impossibilité de Scarf cité plus haut, nous avons obtenu une condition d'existence du noyau qui porte à la fois sur les préférences des agents et sur le domaine de production.

2. UN THEOREME D'EXISTENCE DU NOYAU

a) Présentation du résultat

Bien que la définition du noyau d'une économie ne fasse en aucune manière appel à la notion de prix, la démonstration de son existence repose la plupart du temps sur des raisonnements économiques classiques basés sur cette notion. Par exemple, on démontre que le noyau d'une économie d'échange est non vide en prouvant que l'équilibre concurrentiel est dans le noyau. De même ici, aussi bien la démonstration d'existence que l'énoncé même des conditions suffisantes d'existence font intervenir les fonctions de demande et de coût.

Nous allons maintenant préciser les notations et les hypothèses faites sur le modèle exposé dans la première partie.

1) Les biens

L'économie comporte $l + 1$ biens. Nous nous plaçons dans le cas où il y a un seul output. Il est probablement possible de généraliser au cas où m est quelconque mais l'étude est en cours et nous n'en parlerons pas ici.

2) Le domaine de production

Les hypothèses faites sur $\mathrm{Y} \in \mathbf{R}_+^l \times \mathbf{R}_+$ sont les suivantes :

P. 1 :
- Y est non vide et fermé.
- $(0, 0) \in \mathrm{Y}$.
- $\forall (z, y) \in \mathrm{Y},\ z' \geqslant z,\ y' \leqslant y \Rightarrow (z', y') \in \mathrm{Y}$.
- $\forall z \in \mathbf{R}_+^l, \{y \mid (z, y) \in \mathrm{Y}\}$ est borné supérieurement.

P. 2 : Y est à rendements croissants : $\forall (z, y) \in \mathrm{Y},\ \forall \lambda \geqslant 1,\ (\lambda z, \lambda y) \in \mathrm{Y}$.

P. 3 : Les sections de Y correspondant à des niveaux fixés de la production sont strictement convexes.

$\forall y \geqslant 0,\ \mathrm{S_Y}(y) = \{z \in \mathbf{R}_+^l \mid (z, y) \in \mathrm{Y}\}$ est non vide et strictement convexe.

Si on fixe un système de prix p pour les inputs, on peut définir une fonction de coût du bien produit par :

$$c(p, y) = \inf \{p.z \mid (z, y) \in \mathrm{Y}\}$$

Notons Δ le simplexe de $\mathbf{R}^l$ et $\mathring{\Delta}$ son intérieur :

$$\Delta = \left\{ p \in \mathbf{R}_+^l \mid \sum_{h=1}^{l} p_n = 1 \right\}$$

$$\mathring{\Delta} = \{p \in \Delta \mid p \gg 0 \cdot\}$$

La fonction de coût est définie sur $\Delta \times \mathbf{R}_+$ et les hypothèses P1 et P2 impliquent que :

- $\forall p \in \Delta,\ \ \forall y \geqslant 0,\ \ c(p, y) \geqslant 0$
- $y = 0 \Rightarrow c(p, y) = 0$

- $y \to c(p, y)$ est croissante
- $y \to c(p, y)$ est sub-homogène : $c(p, \lambda y) \leqslant \lambda c(p, y)$.

L'hypothèse P3 de stricte convexité des sections de Y implique l'unicité de la combinaison d'inputs qui permet de produire une quantité y d'output au coût minimum. Ce vecteur d'inputs sera noté $\zeta(p, y)$.

$$\forall p \in \mathring{\Delta},\ p \cdot \zeta(p, y) = c(p, y).$$

C. 4 : c est continue sur $\Delta \times \mathbf{R}_+$

C. 5 : ζ est continue sur $\mathring{\Delta} \times \mathbf{R}_+$

C. 6 : $\forall p \in \mathring{\Delta}\ \ y \to c(p, y)$ est deux fois continûment dérivable sur $\mathbf{R}_+$.

Ces hypothèses reviennent à des conditions de régularité de l'ensemble Y qu'il est plus facile d'exprimer directement sur les fonctions c et ζ.

3) Les agents

Les préférences de l'agent i sont représentées par une fonction d'utilité u_i définie sur $\mathbf{R}_+^{l+1}$ ayant les propriétés suivantes :

U. 1 : u_i est une fonction continue de $\mathbf{R}_+^{l+1}$ dans $\mathbf{R}_+$, surjective.

U. 2 : u_i est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^{l+1}$:

$$\begin{matrix}(x_i, y_i) \geqslant (x_i', y_i') \\ (x_i, y_i) \neq (x_i', y_i')\end{matrix} \Rightarrow u_i(x_i, y_i) > u_i(x_i', y_i').$$

U. 3 : u_i est strictement quasi concave sur $\mathbf{R}_+^{l+1}$.

U. 4 : u_i est deux fois continuement différentiable sur $\mathbf{R}_{++}^{l+1}$.

L'agent i a des ressources initiales $w_i \in \mathbf{R}_+^l$. On suppose évidemment que $w = \sum_{i=1}^{n} w_i \gg 0$.

La logique du raisonnement en terme de coût nous amènera à utiliser la fonction de demande compensée dont nous rappelons la définition.

Soit v_i un niveau d'utilité pour l'agent i et $(p, q) \in \Delta \times \mathbf{R}_+$ un système complet de prix. La demande compensée de l'agent i est la solution du programme :

$$\text{Minimiser } p \cdot x_i + q y_i$$

sous les contraintes :

$$u_i(x_i, y_i) \geqslant v_i$$
$$x_i \geqslant 0$$
$$y_i \geqslant 0$$

Avec l'hypothèse U.3 de stricte convexité des préférences, la solution de ce programme est unique et est notée : $\mathrm{M}_i(p, q, v_i)$.

Si $v = (v_i)_{i=1,\dots,n}$ est une imputation, la demande compensée totale pour l'imputation v et le système de prix (p, q) est :

$$M(p, q, v) = \sum_{i=1}^{n} M_i(p, q, v_i)$$

Nous noterons $m(p, q, v)$ la dernière composante de ce vecteur (celle qui correspond au bien produit).

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat :

• ***Théorème :***

Sous les hypothèses P1-P3, C4-C6, U1-U4, si de plus,

$\forall v$ Pareto Optimale

$$\forall p \in \mathring{\Delta} \quad \forall q > 0 \qquad \frac{\partial m}{\partial q}(p, q, v)\, c''(p, y) < 1 \qquad (I)$$

$$\forall y \geqslant 0$$

alors le noyau de l'économie est non vide.

On peut donner une autre condition suffisante d'existence, du même type que la condition (I) sans être absolument équivalente.

Notons $\epsilon(p, q, v)$ l'élasticité de la demande en bien produit en fonction de son prix.

$$\epsilon(p, q, v) = \frac{\partial m/\partial q}{m}\, q$$

Notons $\eta(p, y)$ l'élasticité du coût marginal du bien produit en fonction de la quantité produite

$$\eta(p, y) = \frac{c''(p, y)}{c'(p, y)}\, y$$

• ***Théorème :***

Sous les hypothèses P1-P3, C4-C6, U1-U4, si de plus

$\forall v$ Pareto Optimale

$$\forall p \in \mathring{\Delta} \quad q > 0 \qquad \epsilon(p, q, v) \;\; \eta(p, y) < 1 \qquad (II)$$

$$\forall y \geqslant 0$$

alors le noyau de l'économie est non vide.

La condition (II) peut paraître un peu plus compliquée que la condition (I). Elle a cependant le mérite de s'appliquer très facilement aux modèles «d'école» que l'on peut créer en spécifiant des fonctions d'utilité et une fonction de production de types classiques.

• ***Corollaire*** : si l'économie est telle que :

– *les fonctions d'utilité des agents sont de type Cobb Douglas*

– *le domaine de production Y est décrit par une fonction de production de type Cobb Douglas ou de type C.E.S. avec rendements croissants*

alors le noyau de l'économie est non vide.

Il est en effet facile de calculer les élasticités dans ces cas là et on trouve que :

$$-1 < \epsilon(p, q, v) < 0 \qquad \forall (p, q) \in \mathring{\Delta} \times \mathbf{R}_{++}$$
$$\forall v \in \mathbf{R}^n_+$$

$$-1 < \eta(p, y) < 0 \qquad \forall y > 0, \quad \forall p \in \mathring{\Delta}$$

La discussion des conditions (I) et (II) est renvoyée au paragraphe II c). Auparavant, nous montrerons comment s'introduisent ces conditions en exposant les idées essentielles de la démonstration.

Le détail de cette démonstration existe dans [3].

b) Les grandes lignes de la démonstration

La démarche consiste à utiliser un «jeu en coût», introduit pour la première fois par P. Champsaur [1] et défini de la manière suivante :

Soit $v = (v_1, \dots, v_n)$ une imputation.

Soit $U(v, S)$ l'ensemble des allocations qui donnent aux membres de la coalition S au moins de niveau d'utilité v_i :

$$U(v, S) = \{\xi = (x_i, y_i)_{i=1,\dots,n} \mid u_i(x_i, y_i) \geqslant v_i \quad \forall i \in S\}.$$

Dès que l'on introduit un prix p pour les l premiers biens, on peut associer un coût à chaque allocation de $U(v, S)$ par :

$$C(p, \xi, S) = p \cdot \sum_{i \in S} x_i + c\Big(p, \sum_{i \in S} y_i\Big)$$

Finalement, on peut définir le coût d'une imputation v pour une coalition S par :

$$\varphi(p, v, S) = \inf\{C(p, \xi, S) \mid \xi \in U(v, S)\}$$

Lorsque p et v sont fixés, $\varphi(p, v, S)$ associe à chaque coalition un nombre réel. Nous pouvons donc considérer que cela définit un jeu coopératif à paiements latéraux. A vrai dire, étant donné que φ associe à chaque coalition un coût et non un gain, il faut, pour rentrer exactement dans le cadre de cette théorie, considérer le jeu $-\varphi$.

Ce jeu permet de construire une allocation dans le noyau de l'économie à partir de la constatation suivante :

- ***Proposition :***

Si une allocation $\xi = (x_i, y_i)_{i,=1,\dots,n}$ est bloquée par la coalition S alors

$$\forall p \in \mathring{\Delta} \quad \varphi(p, u(\xi), S) < p \cdot \sum_{i \in S} w_i$$

(en notant $u(\xi)$ l'imputation de composantes $v_i = u_i(x_i, y_i)$)

Si donc, on trouve une allocation ξ, réalisable, et telle que pour un certain prix,

$$\forall S, \quad \varphi(p, u(\xi), S) \geqslant p \cdot \sum_{i \in S} w_i \tag{I}$$

cette allocation ne pourra être bloquée par aucune coalition.

En se reportant à la définition du noyau d'un jeu à paiements latéraux, (voir par exemple [2]) on voit que si l'on ajoute aux inégalités (I) la condition :

$$\varphi(p, u(\xi), N) = p \cdot \sum_{i=1}^{n} w_i \tag{II}$$

on exprime que le vecteur $(-p \,.\, w_i)_{i=1,\dots,n}$ est dans le noyau du jeu à paiement latéraux $-\varphi(p, u(\xi), \cdot\,)$.

Le problème se ramène donc à ceci :

– trouver p et ξ réalisable tels que le vecteur $(-p \,.\, w_i)_{i=1,\dots,n}$ soit dans le noyau du jeu $-\varphi(p, u(\xi), \cdot)$.

Intuitivement, cela revient à considérer la procédure suivante : supposons qu'un planificateur propose une allocation $\xi = (x_i, y_i)_{i=1,\dots,n}$ (il doit s'assurer qu'elle est réalisable). Chaque coalition S examine le coût minimum nécessaire pour assurer à ses membres le niveau de satisfaction $u_i(x_i, y_i)$. Si ce coût est inférieur à ses ressources $p \cdot \sum_{i \in S} w_i$, elle refuse l'allocation. S'il existe un prix p tel que l'allocation ne soit refusée par aucune coalition, cette allocation est dans le noyau de l'économie.

La résolution du problème passe par deux étapes :

– *étape 1* : On démontre que l'hypothèse de rendements croissants suffit à entraîner l'existence du noyau du «jeu en coût» $-\varphi(p, v, \cdot\,)$ pour tout $p \in \mathring{\Delta}$ et toute imputation v.

– *étape 2* : Il reste à appliquer un théorème de point fixe pour montrer qu'on peut trouver un prix p et une allocation réalisable ξ tel que le vecteur $(-p \,.\, w_i)$ soit dans le noyau du jeu $-\varphi(p, u(\xi), \cdot\,)$. Pour cela, on doit pouvoir associer à toute allocation Pareto Optimale ξ un prix p tel que :

$$\varphi(p, u(\xi), N) = p \cdot \sum_{i=1}^{m} w_i$$

C'est là que se situe la difficulté et on peut en comprendre intuitivement la raison. Le fait que ξ soit Pareto Optimale implique qu'il existe un prix p tel que ξ vérifie les conditions du premier ordre de minimisation du coût par rapport à p. Mais à cause de la présence de rendements croissants en production, ce programme n'est pas convexe. Les conditions du premier ordre ne garantissent donc pas que ξ soit une allocation de coût minimum. En d'autres termes, il se peut qu'il existe une allocation ξ' non réalisable (avec par exemple un niveau de production supérieur) qui donne le même niveau utilité que ξ et dont le coût soit inférieur à celui de ξ. Ceci entraîne alors que :

$$\varphi(p, u(\xi), N) < C(p, \xi, N) = p \cdot \sum_{i=1}^{n} w_i \,.$$

Les conditions (I) ou (II) permettent de contourner cette difficulté. En effet, l'une ou l'autre de ces conditions assure l'unicité de la solution du programme de minimisation du coût. On se ramène au cas où une allocation qui satisfait les conditions du premier ordre est la solution du programme.

Cette difficulté levée, on n'a plus de problème majeur pour appliquer le théorème de point fixe.

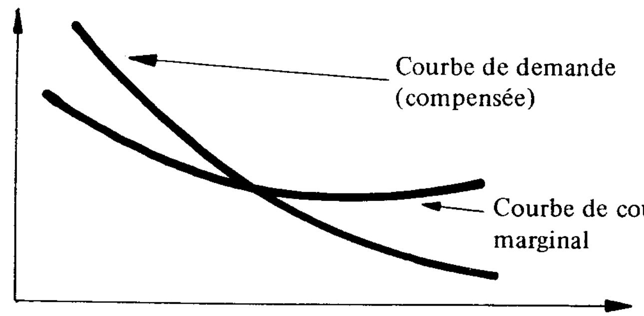
c) Interprétation du résultat

La condition (I) est d'un type familier aux analyses d'équilibres partiels. En effet, une fois le prix p des inputs et l'imputation v fixés, on est ramené à l'analyse du marché du bien produit : $q \to m(p, q, v)$ est la fonction de demande (compensée) de ce bien en fonction de son prix q, et $y \to c(p, y)$ est la fonction de coût en fonction de la quantité produite.

La condition (I) peut s'écrire, puisque $\dfrac{\partial m}{\partial q} < 0$,

$$c''(p \cdot y) > \frac{1}{\partial m / \partial q} \tag{I}$$

Géométriquement, cette condition se traduit par une inégalité entre les pentes de la courbe de demande (compensée) et de la courbe de coût marginal du bien produit. En particulier, cette inégalité implique que la courbe de demande coupe la courbe de coût marginal par dessus.



Graphique 1. – Etude de marché du bien produit à p et v fixés.

Puisque la condition (I) revient à une borne inférieure sur la dérivée du coût marginal, elle implique qu'il n'y a pas de niveau y de production où le coût marginal chute de manière trop importante.

On peut facilement imaginer un cas où cette condition serait violée. Supposons que le bien produit soit tel qu'il existe deux procédés techniques de fabrication : un qui nécessite un faible investissement, mais qui n'a pas un très bon rendement ; un autre qui nécessite un investissement beaucoup plus important, mais dont le rendement est meilleur. A partir d'un certain niveau de production, il devient rentable de passer du premier procédé au second, ce qui se traduit par une chute du coût marginal.

Bien entendu, pour rester dans le cadre du modèle, il faudrait donner une description moins abrupte des possibilités de production, pour respecter les conditions de continuité et de différentiabilité. Mais ceci est toujours possible par approximation.

Il faut noter que la borne inférieure imposée à la dérivée seconde du coût par la condition (I) est d'autant moins contraignante que la sensibilité de la demande aux variations de prix est plus faible. Si on pense qu'une faible élasticité de la demande en bien produit traduit l'absence dans l'économie de biens qui en soient des proches substituts, il n'est pas étonnant que ce facteur apparaisse comme favorable à la stabilité de la production collective pour tirer parti des économies d'échelle.

La condition (II) exprime en termes d'élasticités essentiellement la même exigence que la condition (I) : il ne doit pas y avoir de valeurs de la production où l'élasticité du coût marginal chute trop brutalement.

Il faut enfin insister sur le fait que les conditions (I) ou (II) ne sont que des conditions suffisantes d'existence du noyau. Le fait qu'elles puissent être mises en défaut dans le cas où les gains de productivité se font par palier au lieu d'être régulièrement répartis sur l'échelle de production

n'implique pas forcément que le noyau soit vide dans ce cas. Simplement, cette étude indique que l'examen de ce cas nécessite d'autres méthodes que celles employées ici.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] CHAMPSAUR P. – «How to Share the Cost of a Public Good». International Journal of Game Theory. Vol. 4 (1975).

[2] EKELAND I. – La Théorie des Jeux et ses Applications à l'Economie Mathématique. Presses Universitaires de France. 1974.

[3] QUINZII M. – «An Existence Theorem For the Core of a Productive Economy with Increasing Returns». Cahiers du Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole polytechnique, 1979.

[4] SCARF H.E. et HANSEN T. – The Computation of Economic Equilibria. Yale University Press. New Haven and London, 1973.

[5] SCARF H.E. – «Notes on the Core of a Productive Economy». Mimeo.

[6] SCARF H.E. – «An Outline of Some Results on Production and the Core». Mimeo.